Piano Nazionale Lauree Scientifiche
Laboratorio di Modelli Matematici per le Scienze Biologiche ed Economiche
Vincenzo Sciacca
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Palermo

- Propagazione degli errori di approssimazione
- Modello a crescita geometrica: $x_{k+1} = Ax_k$
  - significato biologico (modello malthusiano)
  - significato economico
  - implementazione numerica con EXCEL
  - Discussione del comportamento della successione al variare del parametro A
  - Soluzione in forma chiusa: $x_k = A^k x_0$.
- Modello lineare affine: $x_{k+1} = Ax_k + B$
  - significato biologico
  - significato economico
  - implementazione numerica con EXCEL
  - Confronto dei modelli (geometrico e a risorse limitate) con dati reali di crescita di popolazioni;
  - Metodo grafico o Cob-Web
  - Introduzione al concetto di punto di equilibrio; come punto iniziale della successione: come eventuale attrattore; come punto di intersezione nel grafico; come punto fisso. Stabilità/instabilità indipendentemente dai dati iniziali a seconda del valore di A, con Excel o carta e penna, periodicità per $A = -1$;
  - Soluzione in forma chiusa: come somma della progressione geome- trica oppure riportandosi con cambio di variabile al caso omogeneo $y_{k+1} = Ay_k(y_k = x_k - B/(1 - A))$;
- Introduzione al Modello Logistico $a_{n+1} - a_n = ra_n(1 - a_n)$
  - Applicazione a problemi concreti (crescita di popolazioni, modelli economici); soluzione non esprimibile in forma chiusa; confronto con il modello malthusiano;
  - Eventuale aggancio con equazione differenziale logistica;
  - Punti di equilibrio per la logistica;
  - Applicazione del metodo grafico e sperimentazione al calcolatore con grafico delle successioni ottenute per diversi valori del parametro;
  - Conclusioni e confronto con i risultati ottenuti con il modello malthusiano;
  - Giustificazione matematica del metodo grafico
  - Equazione normalizzata $x_{k+1} = \mu x_k(1-x_k)$ nell'intervallo $[0, 1]$ e quindi con $\mu \leq 4$. Si pone $x_n = r/(r+1)a_n$ da cui $\mu = 1 + r$.
  - Biforcazioni del Modello Logistico $x_{k+1} = \mu x_k(1 - x_k)$, per $0 < \mu \leq 4$: raddoppio del periodo e transizione al caos.

  - Discussione con diversi valori del dato iniziale e del parametro con $\mu < 3$: $\mu < 1$ convergenza esponenziale a 0; $\mu = 1$ convergenza lenta a 0; $\mu < 3$ convergenza esponenziale al punto fisso;$\mu = 2$ convergenza super esponenziale (si analizza il rapporto $(x_{k+1} - x_\star)/(x_k - x_\star)$ dove $x_\star$ è il punto fisso).
  - Definizione di 2-ciclo e applicazione alla logistica normalizzata per $\mu = 3$
  - $\mu > 3$: StabilitÃ di 2-cicli, esempio $\mu = 1 + r = 3.2$.
  - Biforcazioni con raddoppiamento del periodo; k-cicli, esempio 4-ciclo $\mu = 3.5$, 8-ciclo $\mu = 3.55$, 16-ciclo $\mu = 3.568$, caos per $\mu = 3.6$; nascita di un'orbita di periodo 3, $\mu = 3.84$
  - Caos per $\mu = 4$
    * Sensibilità rispetto ai dati iniziali: per prevedere l'andamento dopo n passi, occorre conoscere il dato iniziale con una precisione superiore a 2^{-n} (qui si possono fare interessanti collegamenti con il concetto filosofico del DETERMINISMO).
    * Transitività: presi comunque due punti, c'è un'orbita che li collega (in senso approssimato)
    * Frattali: iterazione di mappe bidimensionali
    * Caos e Frattali: diagramma di biforcazione della logistica con simulazioni numeriche
- Calibrazione per modelli di crescita di una popolazione
  - Ricerca di una curva che approssima i dati sperimentali. A partire da dati sperimentali individuare la curva soluzione di modelli che meglio approssima i dati e stimare i parametri in gioco. Retta di regressione, scala logaritmica.
  - Strategie di controllo di una popolazione
  - Controllo mediante abbattimento di una percentuale fissa oppure di una percentuale della popolazione attuale. Studio qualitativo, stabilità dei punti fissi, individuazione delle strategie sostenibili. Confronto delle strategie.
- Modelli bi-dimensionali
  - Sistema preda-predatore di Lotka Volterra,
  - Un esempio di modello non lineare di popolazione chiusa: l'epidemia suscettibili-infetti-rimossi.
  - Modello di sviluppo della popolazione: la matrice di Leslie.
  - Esempi di modelli accoppiati lineari e non lineari in ambito biologico: Modello ospite - parassita, Bruchi e farfalle. Modello Lotka - Volterra.
  - catene di Markov,
  - Dinamica amorosa: il modello Romeo-Giulietta. Un modello di amore cauto. Laura e Petrarca.
  - modelli fisici: pendolo, oscillatore armonico smorzato